

LISTA DE EJERCICIOS

LOGICA

CONJUNTOS

RELACIONES

FUNCIONES

DOCENTE: ING. JOSE OMONTE
MATERIA: ALGEBRA I

COCHABAMBA - BOLIVIA

LOGICA

1. De los enunciados siguientes:
 - (a) Hola que tal!
 - (b) $x^2 + 1 < 10$.
 - (c) $2 + 5 > 6$.
 - (d) Todos los nombres son inmortales.
 - (e) Sócrates nació en Atenas.
 - (f) $x + 5 \neq 8$
2. Cuál de las alternativas siguientes es correcta:
 - (a) 3 son enunciados abiertos.
 - (b) 2 son proposiciones.
 - (c) 3 no son proposiciones.
3. Si p: "Carlos vendrá", q: "Carlos ha recibido la carta" y r: "Carlos está interesado todavía en el asunto". Simbolizar los siguientes enunciados:
 - (a) "Carlos vendrá, si ha recibido la carta, siempre que esté interesado todavía en el asunto".
 - (b) "O carlos vendrá, si ha recibido la carta, siempre que esté interesado todavía en el asunto".
 - (c) "Carlos vendrá si y solo si ha recibido la carta o vendrá porque está interesado todavía en el asunto".
4. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones.
 - (a) $(3 + 5 = 8) \vee (5 - 3 = 4)$.
 - (b) $(5 - 3 = 8) \Rightarrow (1 - 7 = 6)$.
 - (c) $(3 + 8 = 11) \wedge (7 - 4 > 1)$.
 - (d) $(4 + 6 = 9) \Leftrightarrow (5 - 2 = 4)$.
5. $\sim [(\sim p \vee q) \vee (r \Rightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \vee q) \Rightarrow (q \wedge \sim q)]$, es verdadera. Hallar los valores de verdad de p, q y r.
6. De la falsedad de $(p \Rightarrow q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)$, se deduce que el valor de verdad de los esquemas: $A = \sim (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$; $B = \sim (\sim r \wedge s) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ y $C = p \Rightarrow \sim [q \Rightarrow \sim (s \Rightarrow r)]$, son respectivamente:
 - (a) FFV.
 - (b) FFF.
 - (c) FVF.
 - (d) FVV.
7. Establecer, por medio de una tabla de valores, si cada uno de los siguientes esquemas moleculares es contingente, tautológico o contradictorio.
 - (a) $\sim [\sim p \Rightarrow \sim (\sim q \wedge \sim p)] \vee \sim (\sim p \vee \sim q)$.
 - (b) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim q \Rightarrow \sim p)$.
 - (c) $[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \vee \sim q)$.

- (d) $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim r] \Leftrightarrow [r \wedge \sim (p \vee \sim q)]$.
 (c) $[(p \vee \sim q) \wedge \sim (r \wedge q)] \Leftrightarrow \sim [(p \vee \sim q) \Rightarrow (q \wedge r)]$
 (f) $\{[(\sim p \wedge r) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\sim q \Leftrightarrow (p \vee r)]\} \vee \{(p \Leftrightarrow q) \vee (q \vee \sim r)\}$.
8. Dados los esquemas lógicos: $P = (p \Rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)$; $R = \sim (\sim p \Leftrightarrow q)$; $Q = \sim (p \vee \sim q)$. Cuál de las siguientes relaciones es correcta:
- (a) $P \equiv R$.
 (b) $R \equiv Q$.
 (c) $P \equiv R$.
 (d) Ninguna.
9. Demostrar, por la tabla de valores o por el método abreviado, si los esquemas representan o no reglas de inferencia válidas.
- (a) $p \Rightarrow q$
 $q \Rightarrow r$
 $r \Rightarrow s$

 $\therefore p \Rightarrow s$
- (b) $q \Leftrightarrow (\sim p \vee r)$.
 $r \vee s$
 $\sim p \Leftrightarrow r$

 $q \vee r$
- (c) $r \Rightarrow \sim p$
 $(r \wedge s) \vee t$
 $t \Rightarrow (q \vee u)$
 $\sim q \wedge \sim u$

 $\sim p$
- (d) $q \Rightarrow p$
 $q \Rightarrow (r \vee s)$
 $\sim (\sim q \vee \sim s)$

 $\therefore r \Rightarrow (s \Rightarrow p)$
- (e) $p \Rightarrow (q \vee r)$
 $q \Rightarrow s$
 $\sim s \vee t$
 $r \Rightarrow s$
 $(s \wedge t) \Leftrightarrow m$
 $n \Rightarrow \sim m$
 $(\sim n \vee a) \Rightarrow b$

 $p \Rightarrow \sim b$

$$(f) \sim a \vee \sim b$$

$$\sim c \Rightarrow a$$

$$\sim b \Leftrightarrow c$$

$$\sim d \vee b$$

d

10. Traducir a forma simbólica y comprobar la validez de los siguientes enunciados:

(a) Si trabajo, no puedo estudiar. Estudio o paso matemáticas, pero trabajé por tanto, pasé matemáticas.

(b) Luis es director de una empresa si tiene el mayor número de acciones; y si tiene el mayor número de acciones, no es un economista o tiene mucho dinero. Ocurre que Luis tiene el mayor número de acciones. En consecuencia, o es un economista o tiene mucho dinero.

(c) Si el omnibus sufrió desperfectos en el camino entonces Patricia llegará tarde a la Universidad, pero, Patricia no llegará tarde a la universidad. Por tanto, si el omnibus sufrió desperfecto en el camino entonces Patricia viajó en taxi.

11. Determinar los esquemas más simples equivalentes a las proposiciones:

$$(a) [(p \Rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \Rightarrow p).$$

$$(b) \sim \{[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))]\} \Rightarrow (p \vee q).$$

$$(c) [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

12. Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes?

$$A = \sim (q \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow (q \vee p); B = [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)] \Leftrightarrow \sim [(p \vee q) \wedge q]; C = \sim (p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q); D = \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (\sim q)].$$

13. Simplificar las siguientes proposiciones y construir un circuito óptico:

$$(a) \{[(\sim p \wedge \sim q) \vee p \vee q] \wedge [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \wedge p]\} \wedge (\sim q).$$

$$(b) [(\sim (p \vee q)) \Leftrightarrow \sim (\sim p \Rightarrow \sim q)] \vee \{[(p \wedge \sim q) \vee \sim [(p \wedge \sim q) \vee (q \Rightarrow p)]]\}.$$

$$(c) \{[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \vee \sim p)] \vee (\sim q \Rightarrow p)\} \wedge \sim p.$$

$$(d) \{[p \Rightarrow (\sim p \vee q)] \wedge p \wedge (p \Rightarrow \sim r)\} \Rightarrow r.$$

$$(e) \{\sim q \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow q]\} \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$(f) [p \Rightarrow (q \wedge \sim p)] \wedge \{[\sim q \Rightarrow (p \wedge \sim r)] \wedge (p \Rightarrow r)\} \Rightarrow r.$$

$$(g) \{[\sim q \Rightarrow (p \wedge \sim r)] \wedge (p \Rightarrow r)\} \Rightarrow q \wedge [p \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$$

$$(h) [(\sim q \Rightarrow r) \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim r)].$$

$$(i) [\sim (p \vee q) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge [(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Rightarrow p)]$$

CONJUNTOS

1. Determinar por extensión y comprensión cada uno de los siguientes conjuntos:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0\}$
- (b) $B = \{x \in \mathbb{N} / 6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0\}$
- (c) $C = \{x \in \mathbb{N} / x^3 - 9x^2 + 26x < 24\}$
- (d) $D = \{x \in \mathbb{Z}^- / |9 - x^2| \geq 7\}$
- (e) $E = \{x \in \mathbb{Z} / |x - 4| - |x - 2| \leq |x - 1|\}$
- (f) $F = \{7, 10, 15, 22, 31, 42, 55, 70\}$
- (g) $G = \{3, 8, 15, 24, 35, 48\}$
- (h) $H = \{54, 45, 63, 36, 72, \dots\}$
- (i) $I = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3x-1}\}$
- (j) $J = \{x \in \mathbb{R} / |\frac{6-5x}{3+x}| \leq \frac{1}{2}\}$.

2. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 10\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in U / x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$, $C = \{x \in U / x \text{ es impar}\}$.

Hallar

- (a) $(A \cup B)' - C$.
- (b) $(A - C)' \cap B$.
- (c) $(A \Delta B) - (A \Delta C)$.
- (d) $(A \cap C)' - (B \cup C)'$.

3. Dada la proposición: $(x \notin A \wedge x \in B) \vee x \in C$. Su negación equivale a:

- (a) $x \in (A \cup B') \cap C'$
- (b) $x \in (A - C) \cup (B \cup C)'$
- (c) $(x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin (B \cup C)$. Cuáles son verdaderas?

4. Dados los conjuntos:

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$A = \{a, c, d, f, h\}$$

$$B = \{b, c, e, f\}$$

$$C = \{a, c, d, e\}$$

Hallar:

- (a) A^C, B^C, C^C .
- (b) $A \cap B^C; B \cap A^C; (A - C) \cup (B - A)$.
- (c) $(A \Delta B) - A, P[(A \Delta B) \cap A^C]$.
- (d) $P[(A - B) \cap (B \cap A^C)]; P[((A - B) \cap (B \cap A^C))]$.

5. Usando leyes o propiedades de conjuntos demostrar la equivalencia de las siguientes propiedades:

- (a) $(A \cap B) \cup (A - B) \equiv A$.
- (b) $[(A - B) \cup B] = B - A$.
- (c) $(A \cup B) - (C - A) \equiv A \cup (B - C)$.
- (d) $(A \cup B) - (A \Delta B) = A \cap B$.

- (c) $(A \cup B) \Delta (B \cup C) = (A \Delta C) - B$.
- (f) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
- (g) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
- (h) $(B - A) \Delta (C - A) = (B \Delta C) - A$.
- (i) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.
- (j) $(A - B) \subseteq (A - C) \cup (C - B)$.

6. Demostrar:

- (a) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.
- (b) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

7. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - x^2 = 6x\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / 3x^2 + 5x \geq 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 + 5x < 3\}$$

Hallar $(A \cap C) \times B'$.

8. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 + 5x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} / 4x^2 + 12x + 9 = 0\}$$

Hallar: $A \times B$.

9. Demostrar:

- (a) $A \subset B \wedge A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$.
- (b) $(A \cup B)' = B' \cap A'$.
- (c) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
- (d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

10. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 22x + 24 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x^2 - 4| = 4 - 2x\}$$

Hallar:

- (a) $A \cup B$.
- (b) $P(A) \cap P(B)$.

RELACIONES

Ing. José Omonte.

1. Hallar el dominio y rango de las siguientes relaciones:

$$1. R_0 = \{(x, y) \in A \times B / xy^2 + 2y - 4x = 0\}; \text{ si } A =]-5, 4[; B = [-4, 6].$$

$$2. R_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 / y = \frac{3x-1}{2-7x} \right\}$$

$$3. R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x - 6y + 5 = 0\}$$

$$4. R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times A / y < -|x-2|\}; \text{ si } A = \{-2, -5, -1, -3, -1, 0\}$$

$$5. R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |x| + 2|y| = 1\}$$

$$6. R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / y < \cos x\}$$

$$7. R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$$

$$8. R_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 9 \leq 0\}$$

$$9. R_8 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} / y^2 + 4x + 4y - 8 \leq 0\}$$

2. Dadas las relaciones R_1 y R_2 graficarlos y hallar el dominio y rango de $R_1 \cap R_2$.

$$1. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq -x^2 - 4x - 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} / x + y > -1\}$$

$$2. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} / y < -|x-2|\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 4x + 1\}$$

$$3. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} / y < -|x-2|\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y \geq x^2 - 4x + 1\}$$

$$4. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} / y \geq |x+3|\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 + x^2 < 9\}$$

$$5. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} / 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 > 4\}$$

$$6. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} / 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 > 4\}$$

$$7. R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cos x\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sin x\}$$

8. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0\}$
 $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / x + y < 19\}$
9. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} / x \geq y^2 - 2y - 3\}$
 $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y < 1\}$

3. Clasificar las siguientes relaciones:

1. $R_0 = \{(x, y) \in A^2 / 3 = x + y\}$; Si $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$.
2. $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 / a^2 + a = b^2 + b\}$.
3. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \in \mathbb{R}^2\}$.
4. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq |x|\}$.
5. $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y^2\}$.
6. $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 - x = y^2 - y\}$.

4. Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia:

1. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - x = y^2 - y\}$.
2. $R = \{(x, y) \in A^2 / x = y \vee x + y = 3\}$; si $A = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $R = \{(x, y) \in B^2 / y^2 = x^2\}$; si $B = [-1, 1]$
4. En \mathbb{Z}^2 se define una relación R mediante:

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x = a$$

5. En \mathbb{R}^2 se define una relación R mediante:

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x + y = a + b$$

6. En \mathbb{R}^2 se define una relación R mediante:

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow xy = ab$$

7. $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / (x+1)^2 = (y+1)^2\}$.
8. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |2x - 1| = |2y - 1|\}$.

5. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, y sea R una relación de A en B definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

1. Determinar R y R^{-1} por extensión.
 2. Representar $A \times B$ y R .
 3. Determinar dominio e imagen de R .
6. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / (x^2 - 2) = x^2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 3\}$$

y las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$ se definen mediante $xRy \Leftrightarrow x + y$ es múltiplo de 5; $yRz \Leftrightarrow 3 \nmid y + z$.

1. Definir R y S por extensión.
2. Definir la composición $S \circ R \subset A \times C$ por extensión.
3. Determinar el dominio y la imagen de las tres relaciones.
4. Determinar $(S \circ R)^{-1}$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$.

FUNCIONES

Ing. José Omonte.

1. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones:

1. $R_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 4\}$.
2. $R_1 = \{(x, y) \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right[\times \mathbb{R} / y = \log_3(2x - 3)\}$.
3. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^3 + 6x^2 - 9x = 0\}$.
4. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^3 + x^2y - x^2 = 0\}$.
5. $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + 2|y| = 1\}$.
6. $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2^{3y-5}\}$.
7. $R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \tan x\}$.

2. Restringir lo que corresponda para que las relaciones del problema anterior, sean funciones, usando notación funcional.

3. Graficar las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in [-3, -1[\cup]1, 3] \\ -x^2 + 2 & ; x \in [-1, 1] \\ x(-x - 6) & ; x \in [-6, -3[\\ -x(x - 6) & ; x \in [3, 6] \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \tan x & ; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \sin x & ; x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \cos x & ; x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ \sec x & ; x \in \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2 & ; x < -4 \\ e^x & ; x \in [-4, 0[\\ -6 & ; x = 0 \\ \log_3 x & ; x \in]0, 3[\\ |4 - x| & ; x \in [3, 8] \end{cases}$$

4. Si $f(x) = x^2 - 3x + 4$, graficar.

$$1. y = f(x).$$

2. $y = f(|x|)$.
3. $y = |f(x)|$.
5. $f(x) = |x| + |x - 1|$.
6. $h(x) = \frac{x^3 - 1}{|x^2 - 1|}$.

4. Clasificar las siguientes funciones:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -x^2 - 4x + 1$.
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x^3 - x$.
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = 3^{2x-1}$.
5. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / G(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.
6. $f: \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{5x + 7}{6 - x}$.

5. Hallar las funciones inversas del problema anterior, restringiendo si es necesario.

6. Dadas las funciones, efectuar las operaciones indicadas:

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & ; \quad x \in [0, 2] \\ -x + 1 & ; \quad x \in]2, 5] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in [0, 3[\\ 4 & ; \quad x \in [3, 6] \end{cases}$$

Hallar: $f + g$; fg ; $f \circ g$; $g \circ f$.

$$2. \quad f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2x - 3$$

$$g: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x^2 - 3x$$

Hallar $f + g$; $\frac{f}{g}$; $g \circ f$; $g \circ f \circ g$.

$$3. \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1} ; \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Hallar $2g - f$; $\frac{3f}{g}$; $g \circ f \circ f$; $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$4. \quad f(x) = \log_2 x ; \quad g(x) = 2^x$$

Hallar $f - 3g$; $f \circ g \circ g$; $(f \circ f \circ f)(g)$

5. Dado las funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 2 \quad ; \quad x \in]-4, 15[\\ g(x) &= \begin{cases} 2 - x & ; \quad x \in]-\infty, -4[\\ 5x & ; \quad x \in]2, -\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

Hallar:

$$\frac{4f - 2g}{3(f \cdot g)}$$

7. Dada la relación: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} / x^2 - y^2 = 4\}$. Determine si es función, si no restrinja lo que corresponda para que sea una función, usando notación funcional.
8. Dada la función $g :]-5, -2] \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = -x^2 - 4x - 1$. Probar analíticamente si la función es inyectiva y sobreyectiva.
9. Dada la función: $g : \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{2x + 3}{4 - x}$ determinar si tiene inversa, si no tiene haga que tenga y halle f^{-1} .
10. Dada la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 16x^2 + 9y^2 = 144\}$ se pide restringir lo que sea necesario para que sea una función biyectiva y escribir la misma en notación funcional.
11. En base a los conjuntos: $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y \mathbb{Z} (conjunto de los números enteros); determinar por extensión las funciones

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B / f(x) = x^2 \\ g &: B \rightarrow \mathbb{Z} / g(x) = x + 1 \end{aligned}$$

luego halle: $g \circ f$.

12. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{w, x, y, z\}$ y sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dados por:

$$f = \{(1, a) (2, a) (3, b) (4, c)\} \quad \text{y} \quad g = \{(a, x) (b, y) (c, z)\}$$

hallar $g \circ f$, $I(f)$, $I(g)$ y $I(g \circ f)$.

LISTA DE EJERCICIOS
Y
FORMULARIO
DE
geometría analítica

DOCENTE
MATERIA

: ING. J. OMONTE
: ÁLGEBRA I

COCHABAMBA - BOLIVIA

SISTEMAS DE COORDENADAS Y LA LINEA RECTA

Mcs. Ing. José Omonte O.

1. Sobre una recta L se ubican consecutivamente los puntos A, C, D y B ; siendo D punto medio de \overline{AB} . Demostrar que: $\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{CB} - \overline{AC})$.
2. Sobre una recta L se dan los puntos consecutivos A, B, C y D . Se toma M punto medio de \overline{AB} y N punto medio de \overline{CD} ; si $\overline{AC} = 18$ y $\overline{BD} = 4$, hallar el valor de MN .
3. La ordenada de un punto es 8 y su distancia al punto $B(5, -2)$ es $2\sqrt{41}$. Hallar la abscisa del punto.
4. El lado desigual de un triángulo isosceles tiene por extremos los puntos $A(2, -1)$ y $B(-1, 2)$ y los lados iguales miden cada uno $\sqrt{17}$ unidades, hallar el vertice opuesto al lado desigual.
5. La longitud del segmento \overline{MN} es igual a 17, su extremo está en el punto $N(-7, 3)$ y la proyección sobre el eje de ordenadas es igual a 15. Hallar las coordenadas del origen de este segmento, si se sabe que forma con el eje de las abscisas, a) un ángulo agudo, b) un ángulo obtuso.
6. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $P(2, 2)$, $Q(-1, 2)$ y $R(4, -2)$. Hallar el producto de las abscisas de los vértices del triángulo.
7. Dados los puntos $P(2, 1)$ y $Q(5, 3)$ tales que $\overline{PB} = 2\overline{AP}$, $3\overline{AQ} = 4\overline{AB}$; hallar las coordenadas de los puntos A y B .
8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(5, 3)$ y forma un triángulo isosceles con las rectas: $L_1 : x - y - 1 = 0$ y $L_2 : x - 7y - 1 = 0$. La recta buscada es la base del triángulo. Resp. $2x + y - 13 = 0$
9. Desde el $C(9, 1)$ se traza una perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 5)$ en el punto D . Tomando \overline{CD} como base de un triángulo isosceles. Encontrar el tercer vertice que se encuentra en el eje "Y". Resp. $y = -6$
10. Los vertices de un triángulo son $A(-1, -1)$, $B(3, 5)$, $C(-4, 1)$. Hallar el punto de intersección de la bisectriz del ángulo exterior del vertice A con la prolongación del lado BC .

11. Hallar un punto P en la recta que une los puntos $A(0, 4)$ y $B(3, 0)$ de manera que los triángulos APO y OBP tengan igual área. Resp. $(\frac{3}{2}, 2)$
12. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo A del triángulo $A(4, 3)$, $B(-4, -1)$ y $C(-7, 5)$. Resp. $x - 7y + 17 = 0$
13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 0)$ y que forma un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{3}{2}$ con la recta $3x + 4y + 6 = 0$.
14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas sabiendo que la longitud del segmento comprendido entre las rectas: $L_1 : 2x - y - 5 = 0$ y $L_2 : 2x - y - 10 = 0$ es igual a $\sqrt{10}$. Resp. $y = \frac{1}{3}x$
15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 6)$ y que la suma de sus coordenadas al origen es 2.
16. Dado el triángulo $A(-6, 4)$, $B(3, -5)$ y $C(6, 10)$, determinar las coordenadas de un punto interior de un triángulo que unidos a los vertices del triángulo forme triángulos de igual área.
17. Una recta pasa por el punto $P(-6, 7)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 10,5 unidades cuadradas. Hallar su ecuación. Resp. $6x + 7y + 21 = 0$
18. Una recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $L_1 : 2x - 3y - 5 = 0$ y $L_2 : x + 2y - 13 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje "X" es igual al doble de su pendiente. Hallar su ecuación.
19. Los puntos medios de los lados del triángulo son $P(2, 5)$, $Q(4, 2)$ y $R(1, 1)$. Hallar las coordenadas de los tres vertices del triángulo. Resp. $A(3, 4)$ $B(5, 6)$ $C(3, 2)$
20. Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto medio del segmento que une $A(-4, 4)$ con $B(2, 2)$ y el punto que está a los $\frac{3}{5}$ de la distancia de $C(5, 3)$ a $D(-3, -2)$.
21. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(5, -5)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de 50 unidades cuadradas. Resp. $x + y = 10$
22. Si dos vertices de un triángulo son $A(-4, 6)$ y $D(3, -8)$, hallar las coordenadas del tercer vertex y el área del triángulo sabiendo que las medianas se intersecan en el punto $G(2, 6)$. Resp. $(7, 20)$

LA CIRCUNFERENCIA

Mcs Ing José Omonte O.

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 1)$ y $B(-1, 2)$ y es tangente al eje X .
ResP. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$
2. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por $A(1, 0)$ y son tangentes a las dos rectas $L_1 : 2x + y + 2 = 0$ y $L_2 : 2x + y - 16 = 0$.
ResP. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$, $(x-9)^2 + (y-\frac{22}{3})^2 = 20$
3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(6, 1)$ y es tangente a cada una de las rectas: $L_1 : 4x - 3y + 6 = 0$ y $L_2 : 12x + 5y - 2 = 0$.
ResP. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$
4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de las coordenadas y es tangente a las rectas: $L_1 : 6x + 8y - 10 = 0$, $L_2 : 3x + 4y + 5 = 0$
5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(3, 5)$ y es tangente a la recta $3x + y - 2 = 0$ en $(1, 1)$.
6. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $L : x - y - 4 = 0$ y que pasa por la intersección de las circunferencias: $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 4y - 3 = 0$.
7. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diametro es la cuerda común de las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$.
8. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{10}$, que pasa por el punto $P(7, 5)$ y que es tangente a la recta $x - 3y + 4 = 0$.
ResP. $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 10$
9. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente a las rectas: $2x + y = 8$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, un punto de tangencia es $P(2, 0)$.
10. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta: $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$.
ResP. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$
11. Hallar en la circunferencia $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$ el punto Q más proximo a la recta $L : 8x - 4y + 73 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(1, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto $T(-2, 1)$.
13. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(-4, -7)$, $Q(5, 8)$ y $R(-3, 6)$. Resp. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 35$
14. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en $L_1 : 3x - y + 1 = 0$ y tangente a $L_2 : 3x + 4y - 4 = 0$. Seleccionar los miembros con radio 6 unidades. $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 36$ $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 36$
15. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias $C_1 : 9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$, y demostrar que es perpendicular a la línea que une los centros. $126x - 42y + 269 = 0$
16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 = 5$ en su punto común y que es tangente a la recta $L : x - 2y - 1 = 0$. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$
 $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 25 = 0$
17. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$ y con centro en la recta $4x + 3y - 2 = 0$.
18. Se da $P(13, 13)$ en el interior del ángulo formado por las rectas: $L_1 : x - 3y + 6 = 0$ y $L_2 : 3x - y - 22 = 0$. Se pide la ecuación de la circunferencia que pasa por P y es tangente a los lados del ángulo.
19. Encontrar la ecuación del círculo con centro en el origen y tangente al círculo de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 28 = 0$.
20. Hallar las ecuaciones de los círculos que pasan por las intersecciones de: $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, y tienen un radio igual a 4.

LA PARABOLA

Mcs Ing José Omonte O.

- Hallar la ecuación de la parábola con vertice sobre la recta $L_1 : x - y + 1 = 0$ de directriz horizontal, foco sobre la recta $L_2 : x + y + 3 = 0$ y que pasa por $A(5, 6)$.

$$(x-5)^2 = -56(y-6) \quad (x+3)^2 = 8(y+2)$$
- Hallar la ecuación de la parábola con foco en $F(1, 3)$, vertice en la recta $5x - 2y = 4$ y cuya directriz es vertical.
- Aplicando la definición de la parábola hallar su ecuación con los siguientes datos: foco $(-1, 1)$, Directriz $x + y - 5 = 0$.
- Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(7, 8)$, $B(2, -2)$ y su directriz es la recta $x + 3 = 0$.

$$(y-2)^2 = 4(x+2) \quad (y+2)^2 = 20(x-2)$$
- Si el lado recto de una parábola es igual a 1, eje paralelo al eje "X" y que pasa por los puntos, $A(-6, 4)$, $B(9, 1)$. Hallar su ecuación.
- Una parábola pasa por los puntos $A(2, -2)$ y $B(7, 8)$ y su directriz es la recta $x + 3 = 0$. Hallar la ecuación.
- El vertice de una parábola es el foco superior de la elipse, $13x^2 + 4y^2 - 52x - 24y + 36 = 0$ y además la parábola pasa por los extremos del eje menor de la elipse. Hallar su ecuación.
- Hallar la ecuación de la parábola que es simétrica respecto a la recta $y + 4 = 0$, es tangente a la recta $x - 6 = 0$ y la abscisa de su foco es 4.

$$(y+4)^2 = -8(x-6)$$
- Hallar la ecuación de la parábola cuyo lado recto mide 6 unidades, de directriz $y + 3 = 0$ y foco sobre $L : 2x - y + 1 = 0$.
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el extremo inferior del lado recto de la parábola $4y^2 + 32x - 12y + 9 + 32b = 0$ y que es perpendicular a la recta $L_1 : 2x - 6y + 3 = 0$ que pasa por el vertice de la parábola.
- Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje Y, y que pasa por los puntos $(-1, 5)$, $(-1, 0)$, $(-6, 3)$.
- Hallar la ecuación de la parábola cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $L(3, 5)$ y $R(3, -3)$.

13. Hallar la ecuación de la cuerda focal de la parábola $3y^2 - 8x - 12y - 4 = 0$, tal que su abscisa en el origen es el doble de su ordenada en el origen.
 $3x + 6y - 8 = 0$
14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el extremo inferior del lado recto de la parábola $4y^2 + 32x - 12y + 9 + 32b = 0$ y que es perpendicular a la recta $L : 2x - 6y + 3 = 0$ y que pasa por el vértice de la parábola.
 $6x + 2y - 1 = 0$
15. Se plantea hacer un arco parabólico, con eje vertical y cuyos puntos de apoyo están separados por una distancia de 30 metros. Si el foco de la parábola debe estar a 8 metros de altura, cual es la altura que debe tener el arco?
 $K = 12,5 \text{ m}$
16. Un arco forma una parábola con eje vertical. Su punto más alto es de 18 m sobre la base cuya longitud es 36 m. Hallar la longitud de una cuerda horizontal que pasa a través del arco a 10 m. sobre la base.
 $AB' = 24 \text{ m}$
17. Un depósito de agua tiene sección transversal parabólica, cuando el nivel AB del agua alcanza una altura de 6 m, su longitud AB mide 24 m; cuando el nivel decrece a 4 m, se pide calcular la longitud $A'B'$ del nivel del agua.
 $A'B' = 8\sqrt{3} \text{ m}$
18. El cable de un puente colgante cuelga en forma de parábola cuando el peso está uniformemente distribuido horizontalmente. La distancia entre dos torres es 1500 pies, los puntos de soporte del cable en las torres están a 220 pies sobre la carretera, y el punto más bajo del cable está a 70 pies sobre la carretera. Hallar la distancia vertical entre el cable y el punto de la carretera situado a 150 pies del pie de la torre.
 $y = 166 \text{ pies}$
19. Si $P(-2, -4)$ es el punto medio de una cuerda de la parábola $y^2 + 6x + 10y + 19 = 0$, hallar la ecuación de dicha cuerda.
 $3x + y + 10 = 0$
20. Demostrar analíticamente que la longitud del radio vector de cualquier punto de la parábola $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ es igual $|y_1 - k + p|$.

LA ELIPSE

Mcs Ing José Omonte O.

1. Deducir la ecuación de la elipse que tiene sus focos en los puntos $F_1(3, 4)$ y $F_2(-1, 2)$ y cuya longitud del eje mayor es 8 unidades. Determinar así mismo las coordenadas del centro de la elipse; sus vertices y longitud del lado recto.
2. Los focos de una elipse están en las rectas: $2x + 9y = 0$, $2x + y = 0$ el eje focal es la recta $y = 2$. Hallar la ecuación de la elipse si el eje mayor mide 10.
3. Sea una elipse de centro $C(-4, 3)$ eje mayor paralelo al eje X . Hallar su ecuación si la distancia entre sus focos es 24 y su lado recto es 36.
4. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(4, -1)$, uno de sus focos $(1, -1)$ y que pasa por el punto $(8, 0)$.
5. Un extremo de una cuerda que corta al eje mayor, coincide con un extremo del lado recto de la elipse $9x^2 + 25y^2 + 36x + 50y - 164 = 0$, formando con este un ángulo de 60 grados. Hallar la longitud del segmento del eje mayor comprendido entre el mismo lado recto y la cuerda.
 $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
6. Los vertices de una elipse son los puntos $V_1(9, -6)$ y $V_2(1, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.
7. Hallar la ecuación de la elipse cuya directriz es la recta $x = 0$, uno de sus focos es el punto $F(-1, 1)$ y tiene excentricidad $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, hallar las coordenadas del otro foco, los vertices y centro de la elipse.
8. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos y vertices coinciden con los focos y vertices de las parábolas: $y^2 + 4x - 12 = 0$ y $y^2 - 4x - 12 = 0$.
 $5x^2 + 9y^2 = 45$
9. El techo de un pasillo de 20 pies de ancho tiene la forma de una semi-elipse, y tiene 18 pies de altura en el centro y 12 pies de altura en las paredes laterales. Hallar la altura del techo a 4 pies de cualquier pared.
 $16,8 \text{ pies}$
10. El punto $A(-3, -5)$ está en una elipse, uno de cuyos focos es $F(-1, -4)$ y la directriz correspondiente se da mediante la ecuación $L : x - 2 = 0$. Hallar la ecuación de esta elipse.

11. Las rectas $x = \pm 8$ son directrices de una elipse, cuyo eje menor tiene longitud 8. Hallar la ecuación de la elipse.

$$x^2 + 2y^2 = 32$$

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están sobre el eje X, centro en el origen, pasa por $P(-\sqrt{5}, 2)$, y la distancia entre sus directrices es 10.

13. Determinar la ecuación de la elipse cuyo centro de gravedad está en $(0, 0)$, el eje mayor a lo largo del eje de las X, el lado recto igual a 6 y el valor de la excentricidad es $1/2$.

14. Si una elipse con eje paralelo al eje X es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, y sus focos son los puntos de la circunferencia, hallar su ecuación.

$$(x-3)^2 + 2(y+2)^2 = 50$$

15. Si $V_1(8, 5)$ y $V_2(-2, 5)$ son los vertices de una elipse, y uno de sus focos divide al segmento V_1V_2 en la razón $1/9$, hallar la ecuación de la elipse.

$$9(x-3)^2 + 25(y-5)^2 = 225$$

16. Se tiene la elipse $nx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$, de eje focal paralelo al eje X, cuya excentricidad es $1/2$. Si $c(h, k)$ son las coordenadas del centro, hallar $h + k$.

$$h + k = 0$$

17. El vertex de una parábola es el foco superior de la elipse $13x^2 + 4y^2 - 52x - 24y + 36 = 0$ y además la parábola pasa por los extremos del eje menor de la elipse. Hallar su ecuación.

$$3x^2 - 12x + 4y - 12 = 0$$

18. El punto $A(-3, -5)$ está en una elipse, uno de cuyos focos es $F(-1, -4)$ y la directriz correspondiente se da mediante la ecuación $x - 2 = 0$. Hallar la ecuación de esta elipse.

19. Hallar la ecuación y la longitud de cada lado recto de una elipse de excentricidad $2/3$, uno de cuyos focos es $F(-8, -2)$ y directriz asociada, $x + 3 = 0$.

$$5x^2 + 9y^2 + 40x + 38y - 64 = 0 \quad LR = \frac{20}{3}$$

20. Si $B_1(3, 5)$ y $B_2(3, -3)$ son los extremos del eje menor de una elipse y uno de sus vertices está en la recta $3x - y + 7 = 0$, hallar su ecuación.

LA HIPERBOLA

Mcs Ing José Omonte O.

1. Hallar la longitud del lado recto de la siguiente conica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Hallar la ecuación de la hipérbola con un foco en $F(3, 7)$, sus asíntotas se intersectan en $(3, 2)$ y una asíntota pasa por $P(-1, 5)$. $16(y-2)^2 - 9(x-3)^2 = 144$
3. Dada la ecuación de la hipérbola: $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$. Hallar el centro, los vértices, los focos, las asíntotas y graficar.
4. Demostrar que la distancia del foco de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ a su asíntota es igual a b .
5. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-5, -3)$, $(-5, -1)$ y su excentricidad es igual a $\sqrt{5}$. Hallar su ecuación.
6. Reducir la siguiente ecuación $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ a su forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos; las longitudes de los ejes transversos y conjugados, el lado recto, excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.
7. Hallar la ecuación de una hipérbola cuya distancia focal es $4\sqrt{13}$, sus asíntotas son las rectas $L_1 : 3x - 2y - 2 = 0$ y $L_2 : 3x + 2y + 14 = 0$, y su eje conjugado es paralelo al eje Y . $9(x+2)^2 - 4(y+4)^2 = 144$
8. Hallar la ecuación de una hipérbola equilátera que tiene por asíntotas los ejes coordenados y es tangente a la recta $L : x + y + 2 = 0$. $xy = 1$
9. Determinar el valor de "n" de modo que la ecuación $nx^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0$ represente una hipérbola con eje transversal paralelo al eje X y de excentricidad $= \frac{3}{2}$. $n = 5$
10. Hallar la ecuación de la conjugada de la hipérbola cuyo foco es $F(-2, 1)$, su directriz asociada $L : 2x + 3 = 0$ y su excentricidad $= \frac{2}{\sqrt{5}}$. $3y^2 - x^2 - 6y = 0$
11. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse $16x^2 + 25y^2 = 1600$ y las directrices pasan por los focos de la elipse. $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$
12. Hallar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen una de cuyas asíntotas es la recta $2\sqrt{5}x - 3y = 0$ y pasa por $P(-1, 2)$. $9y^2 - 20x^2 = 16$

13. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyo eje conjugado mide 6, sus asíntotas son las rectas $L_1 : y = 2x + 3$ y $L_2 : y = -2x - 1$ y su eje focal es paralelo al eje Y.
- $$\frac{(y-1)^2}{36} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$
14. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V_1(2, 8)$ y $V_2(2, -2)$ y un foco $F(2, 3 + \sqrt{29})$.
- $$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$
15. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en la recta $y = 4$ y son simétricas respecto del punto $A(3, 4)$, sabiendo además que la distancia entre los focos es 10 y que el eje conjugado mide 8.
16. La ecuación del eje focal de una hipérbola es la recta $x + 2 = 0$, si los focos están sobre las rectas $L_1 : 4x + y = 0$ y $L_2 : 2x - y = 0$, hallar la ecuación de la hipérbola, sabiendo que pasa por el punto $P(0, 7)$.
17. Hallar la ecuación de una hipérbola cuya distancia focal es $4\sqrt{13}$, sus asíntotas son las rectas $L_1 : 3x - 2y - 2 = 0$ y $L_2 : 3x + 2y + 14 = 0$, y su eje conjugado es paralelo al eje Y.
18. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene como directriz la recta $2x - 3 = 0$, foco $F(3, -1)$ y pasa por $P(6, 5)$.
19. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyo vértice es el punto $(0, 10)$ y una de cuyas asíntotas es la recta $3x - 4y = 0$.
20. Hallar el centro, excentricidad, focos y asíntotas de la hipérbola: $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$.

SISTEMAS DE COORDENADAS

Ing. José Omonte O.

1. Los puntos extremos de un segmento son: $A(6, 2)$ y $B(-3, 10)$; entonces el punto $P(x, y)$, que divide a este segmento en la razón $BP : PA = -8/3$, es:
a) $(10, -2)$ b) $(57/5, -14/5)$ c) $(11, -2)$ d) $(8, -3)$ e) ninguno.
 2. El segmento que une $A(5, -2)$ y $B(2, 1)$ se prolonga hasta un punto $P(x, y)$, sabiendo que $x < 0$ y $PB = 5AB$, hallar $x + y$.
a) 3 b) -3 c) 6 d) -5 e) -2
 3. Sea $P(a, b)$ un punto que equidista de los puntos $A(-3, 4)$ y $B(3, 2)$. Si la pendiente de la recta que pasa por P y el origen es $3/5$, hallar $a + b$.
a) 3 b) $3/2$ c) -2 d) $-3/2$ e) 4
 4. La grafica de $L = \{(x, y) / 2x - y - 5 = 0\}$ y $C = \{(x, y) / x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0\}$ se cortan en dos puntos, la distancia entre estos dos puntos es:
a) 4 b) 5 c) menor que 4 d) $\sqrt{20}$ e) $\sqrt{5}$
 5. Los vertices de un cuadrilatero son $A(-3, 6)$; $B(3, -1)$; $C(7, 3)$ y $D(3, 9)$. Hallar la razón $AP : PC$ en que la diagonal BD divide a AC , donde P es el punto de intersección de las diagonales.
a) $2/3$ b) $3/2$ c) $5/3$ d) $3/5$ e) $4/3$
 6. El segmento de extremos $A(-2, -4)$ y $B(1, 0)$ es dividido por los puntos P y Q en las razones $-3/2$ y $-2/3$, respectivamente. La distancia entre P y Q es:
a) $2/5$ b) 1 c) 10 d) 15 e) 25
- LA LINEA RECTA
7. Sean A y B las intersecciones de la recta $x - 2y + 4 = 0$ con los ejes X e Y respectivamente. Hallar el valor de m para que un punto de la recta $y = mx$ divida al segmento en la razón $r = 2$.
a) $1/4$ b) $1/2$ c) 1 d) 2 e) $4/5$
 8. Si los puntos $A(1, 0)$ y $C(2, -3)$ son los vertices opuestos de un rectangulo y un lado es paralelo a $x - y = 0$, su área es:
a) 16 b) 8 c) 4 d) 10 e) 5
 9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -3)$ y que divide a la recta que une los puntos $A(6, 3)$ y $B(2, -1)$ en la relación $2/5$.
a) $11x - 6y = 40$ b) $11x - 4y = 34$ c) $11x + 6y = 4$ d) $11x - y = 40$ e) $11x + y = 34$
 10. Dado el segmento de extremos $A(2, -2)$ y $B(6, 2)$, hallar la ecuación de la recta con pendiente positiva que pasa por el origen y divide al segmento en dos partes cuyas longitudes están en la relación $5/3$.
a) $x + 9y = 0$ b) $x - 8y = 0$ c) $x - 9y = 0$ d) $9x - y = 0$ e) $9x + y = 0$

11. Las rectas L y L_1 son perpendiculares y se cortan en el punto $A(2, 7)$. Si L_1 corta al eje X en el punto B y si la distancia $d(A, B) = 4$, hallar la ecuación de L . (la abscisa de B es < 2)
- a) $2x - \sqrt{7}y + 3 = 0$ b) $3x - \sqrt{7}y + 1 = 0$ c) $3x + \sqrt{7}y - 13 = 0$ d) $2x - \sqrt{7}y + 2 = 0$ e) ninguno

12. La ecuación de una recta con pendiente positiva que pasa por el punto $A(2, 1)$ y forma con la recta $3x + 2y + 4 = 0$ un ángulo de 45 grados, es:
- a) $4x - 5y = 3$ b) $5x - y = 9$ c) $2x - 3y = 1$ d) $5x - 2y = 8$ e) $2x + 3y = 8$

LA CIRCUNFERENCIA

13. Una circunferencia pasa por $P(-2, 1)$ y es tangente a la recta $L : 3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $Q(4, 3)$, si su centro es $C(h, k)$, entonces $h + k$, es:
- a) $33/7$ b) $9/7$ c) $41/7$ d) $36/7$ e) $5/7$
14. Una cuerda de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 8x - 4y - 7 = 0$ está sobre la recta $x + 2y - 2 = 0$, entonces la longitud de la cuerda, es:
- a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$
15. Hallar la ecuación de la recta que determina en la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ una cuerda cuyo punto medio es $M(-2, -3)$.
- a) $2x + y + 7 = 0$ b) $x - 2y = 4$ c) $x - y = 1$ d) $x + y + 5 = 0$ e) $x + y = 4$
16. La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 0)$; $B(0, 2)$ y $C(2, 4)$, es:
- a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 4$ b) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = -4$ c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ e) $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 4$
17. Por el origen de coordenadas se han trazado todas las posibles cuerdas a la circunferencia $(x - 8)^2 + y^2 = 64$. La ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de está cuerda es:
- a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ c) $x^2 + y^2 - 8x = 0$ d) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ e) $x^2 + y^2 + 8x = 0$
18. La ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$, que biseca a la cuerda de la circunferencia que está sobre la recta $L : x + 3y - 6 = 0$, es:
- a) $3x + 2y + 2 = 0$ b) $3x - y = 11$ c) $x - 2y = 7$ d) $x + 2y - 5 = 0$ e) $x + 2y = 4$

LA PARABOLA

19. Una parábola tiene un foco en $F(7, 2)$ y su directriz en la recta $x - 5 = 0$. La parábola corta al eje X en un punto cuya abscisa es:
- a) 11 b) $15/2$ c) 6 d) 7 e) 8

20. Si la recta $x = 8$ determina en la circunferencia de centro $C(4, -1)$ una cuerda de 6 unidades de longitud, la ecuación de la parábola con vértice en el centro de la circunferencia y que pasa por los extremos de la cuerda es:
- a) $4y^2 - 9x + 8y + 40 = 0$ b) $4y^2 - 8x + 9y + 40 = 0$ c) $4y^2 - 8x + 9y = 40$
d) $4y^2 + 4x + 9y = 40$ e) $4y^2 + 8x - 4y = 40$
21. Hallar el área del trapecio inscrito en la parábola $y = x^2 - 3x - 10$ si una de sus bases está en el eje X y la otra pasa por el punto de intersección de la parábola con el eje Y .
- a) $50 u^2$ b) $40 u^2$ c) $30 u^2$ d) $20 u^2$ e) $45 u^2$
22. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 6x$ con las bisectrices de los cuadrantes.
- a) $4\sqrt{5} u^2$ b) $35 u^2$ c) $5\sqrt{7} u^2$ d) $20 u^2$ e) $4\sqrt{7} u^2$
23. Si la recta $L : y = 4x - k$ es tangente a la curva $y = x^2 - 2x + h$, entonces $h+k$ vale:
- a) 6 b) 9 c) 15 d) 3 e) 8
24. Sea la parábola $y^2 = 4x + 5$, hallar la ecuación de la recta L que pasa por $P(1, -3)$ de la parábola y que no corta a ésta en ningún otro punto.
- a) $3x - 2y - 9 = 0$ b) $3x + 2y = -1$ c) $2x + 3y = -7$ d) $2x + 3y - 7 = 0$ e) $3x + 2y = 4$

LA ELIPSE

25. En la elipse $2x^2 + 4y^2 = 1$, la distancia entre sus directrices es:
- a) $2\sqrt{2}$ b) 1 c) 4 d) 3 e) 2
26. Si una elipse de focos $(8, 6)$ y $(-4, 3)$ pasa por el punto $(0, 0)$, entonces la longitud de su eje menor es:
- a) $6\sqrt{2}$ b) 15 c) 6 d) $3\sqrt{17}$ e) $3\sqrt{2}$
27. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, calcular la longitud de la cuerda que une los puntos de contacto.
- a) $\sqrt{29}/4$ b) $2\sqrt{85}/5$ c) $4\sqrt{37}/7$ d) $2\sqrt{10}/5$ e) $3\sqrt{75}/5$
28. Una circunferencia que pasa por $(0, 1)$ es tangente interiormente a una circunferencia $x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$. ¿qué lugar geométrico describe su centro?
- a) $9x^2 + 5y^2 = 15$ b) $5x^2 + 9y^2 = 15$ c) $20x^2 + 35y^2 = 1$ d) $36x^2 + 20y^2 = 1$ e) $20x^2 + 36y^2 = 1$
29. En una elipse se tiene que la distancia del foco al centro es igual a la distancia del foco a la directriz asociada. Hallar su excentricidad.
- a) $1/2$ b) $\sqrt{2}/3$ c) $\sqrt{2}/2$ d) $\sqrt{2}/6$ e) $\sqrt{3}/2$

30. A qué es igual la excentricidad de una elipse si la distancia entre sus focos es igual a la distancia entre un vértice y un extremo del eje menor?

a) $\sqrt{10}/5$ b) $2\sqrt{5}/5$ c) $\sqrt{2}/5$ d) $2/5$ e) $\sqrt{3}/2$

LA HIPERBOLA

31. La ecuación de una hipérbola es de la forma $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$, las ecuaciones de sus asíntotas $3y = +4x$, y la distancia entre sus directrices es igual a $16/5$. Hallar $a + b + c$.

a) 12 b) 18 c) 8 d) 6 e) 7

32. El centro C , un foco F y un punto P de una de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 108$ son los vértices de un triángulo recto en P . Hallar su área.

a) $9 u^2$ b) $18 u^2$ c) $8 u^2$ d) $12 u^2$ e) $10 u^2$

33. Las asíntotas de una hipérbola son las rectas $3x - 2y - 7 = 0$ y $3x + 2y + 1 = 0$. Hallar la ecuación de la hipérbola si uno de sus vértices es el punto $V(1 + \sqrt{6}, -2)$.

a) $4(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 54$ b) $9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 54$ c) $4(x-1)^2 - 9(y-2)^2 = 54$ d) $9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 54$ e) $9(x+1)^2 - 4(y+2)^2 = 54$

34. En la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 20$ hallar los puntos tales que su distancia al foco izquierdo es el doble de su distancia a su foco derecho.

a) $(6, +2\sqrt{10})$ b) $(4, +\sqrt{15})$ c) $(+2, 0)$ d) $(8, +5\sqrt{3})$ e) $(4, +2\sqrt{15})$

35. Los focos de la elipse $9(x+3)^2 + 16(y+5)^2 = 144$ son los vértices de una hipérbola y reciprocamente, hallar la ecuación de la hipérbola.

a) $7(x+3)^2 - 9(y+5)^2 = 63$ b) $9(x+3)^2 - 7(y+5)^2 = 63$ c) $9(x+3)^2 - 16(y+5)^2 = 144$ d) $9(x-3)^2 - 7(y-5)^2 = 63$ e) $9(x+3)^2 - 16(y+5)^2 = 63$

36. La ecuación de la hipérbola equilátera que tiene por asíntotas los ejes coordenados y es tangente a la recta $L: x - 2y + 8 = 0$, es:

a) $xy = 8$ b) $xy = 4$ c) $xy = -4$ d) $xy = -8$ e) $xy = 6$